INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2005
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Loi de Poisson**

Le nombre de clients X dans une grande surface de distribution pendant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dans cette grande surface, chaque client a la probabilité $p \in]0,1[$ de se faire voler son portefeuille. On note Y, le nombre de portefeuilles volés dans la période considérée dans cette grande surface. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

2] **Loi Binomiale**

Un laboratoire doit analyser n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est π et l'on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en a groupes d'effectifs b ($n = ab$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des b prélèvements de ce groupe. Si ce mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des b prélèvements du groupe ne contient pas le corps C. Si ce mélange contient le corps C, il faut alors analyser séparément les b prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C ; le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors $b+1$.

On désigne par X, le nombre total d'analyses effectuées. Quels sont les valeurs possibles de X, en déterminer les probabilités. On pourra considérer la variable aléatoire intermédiaire $Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{X-a}{b}$ en introduisant $p \stackrel{\text{def}}{=} 1-(1-\pi)^b$.

3] **Changement de variable aléatoire**

Soit la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Y) continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f_{X,Y}(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{0<y<x}(x,y),$$

où $\mathbb{1}_A(x,y)$ désigne la fonction indicatrice ($\mathbb{1}_A(x,y) = 1$ si $(x,y) \in A$ et $\mathbb{1}_A(x,y) = 0$ ailleurs.
3.1] Déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires marginales X et Y.
3.2] On définit $Z \stackrel{\text{def}}{=} Y/X$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.
3.3] Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire bidimensionnelle (X,Z). Les variables aléatoires X et Z sont elles indépendantes ?

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11 (les références citées sont celles du résumé de cours du polycopié)

1] **Loi de Poisson**
D'après la formule des probabilités totales [I.7], en appelant les causes $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, le nombre X de clients vaut i :

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}P(X=i)P(Y=k/X=i).$$

D'après la définition de la loi de Poisson : $P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$. Et d'après l'interprétation de la probabilité conditionnelle :

$$P(Y=k/X=i)=\begin{cases}0 & \text{si } i<k\\ C_i^k p^k(1-p)^{i-k} & \text{si } i\geq k\end{cases}$$

En conséquence $P(Y=k)$ devient :

$$\begin{aligned}P(Y=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k}\\ &= \frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!}=\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p},\end{aligned}$$

soit une loi de probabilité de Poisson de paramètre λp. Ce résultat est similaire à celui obtenu dans l'exercice de TD II.4 Introduction au processus de Poisson homogène, à propos du processus d'effacement.

2] **Loi Binomiale**

Puisqu'il y a a groupes d'effectifs b et que pour chacun de ces groupes 1 ou $b+1$ analyses sont effectuées, le nombre X d'analyses prend les valeurs $\{a, a+b, a+2b, ...a+kb, ..., a+ab\}$, soit les valeurs $X=a+Yb$ avec $Y\in\{0,1,...,a\}$ où Y représente le nombre de mélanges qui contiendront le corps C. Nous avons donc affaire à une suite de a expériences de Bernoulli indépendantes où l'événement considéré est {contient le corps C} a une probabilité de $1-(1-\pi)^b$ que l'on note p. Par suite la variable aléatoire Y suit une loi de probabilité Binomiale de paramètre (a,p) avec $p\overset{\text{def}}{=}1-(1-\pi)^b$. Puis

$$P(X=a+kb)=C_a^k[1-(1-\pi)^b]^k(1-\pi)^{b(a-k)}\qquad\text{pour}\quad k=0,1,...,a.$$

3] **Changement de variable aléatoire**

D'après [II.15],

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\left(\int_0^x\theta^2e^{-\theta x}dy\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)=\theta^2xe^{-\theta x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx=\left(\int_y^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}dx\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta[-e^{-\theta x}]_y^{+\infty}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)=\theta e^{-\theta y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Par définition $Z\in]0,1[$ et sa fonction de répartition devient pour $z\in]0,1[$

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= P(Z<z)=P(Y<zX)=\iint_{\Delta_z}f_{X,Y}(x,y)dxdy\ \text{ avec } \Delta_z\overset{\text{def}}{=}\{(x,y),0<y\leq zx\}\\ &= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{zx}\theta^2e^{-\theta x}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}\theta^2e^{-\theta x}zxdx=z\int_0^{+\infty}\underbrace{\theta^2xe^{-\theta x}}_{\text{d.d.p. de }X}\ dx=z.\end{aligned}$$

Par suite la variable aléatoire Z est distribuée selon une loi de probabilité uniforme sur $]0,1[$: $f_Z(z) = \mathbb{1}_{]0,1[}(z)$.
3.3] Puisque la relation entre (X,Y) et (X,Z) est bijective et que la variable aléatoire (X,Y) est continue, la relation [II.21a] s'applique et :

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) &= |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & x \end{pmatrix}| f_{X,Y}(x,y)_{|x=x,y=zx} \\ &= x\theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \\ &= f_X(x) f_Z(z) \end{aligned}$$

Par suite les variable aléatoires X et Z sont indépendantes.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (1ère session)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seule une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 24.11.2006
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année :

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

Deux émetteurs de particules émettent chacun une particule pendant l'intervalle de temps $[0, t_0]$. On note T_1 et T_2, les instants respectifs d'émission des deux particules émises. Le compteur qui reçoit une particule à l'instant t est inhibé pendant l'intervalle de temps $[t, t+\tau]$ (ne compte plus aucune particule reçue pendant cette durée d'inhibition τ, τ étant une constante qui ne dépend que du compteur et $\tau < t_0$). On suppose que les deux particules sont émises "de façon indépendante" et "au hasard" vers le compteur.
1.1] Par quel espace probabilisé peut-on modéliser une telle expérience aléatoire ? Quel est l'événement {une particule n'est pas enregistrée} dans cet espace probabilisé ?
1.2] En déduire la probabilité qu'une particule ne soit pas enregistrée ?

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

La durée de vie X de chaque transistor qui équipe un étage d'un oscilloscope est modélisée par une variable aléatoire de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \frac{a}{x^2} \mathbb{1}_{]a,\infty[}(x)$$

avec $a = 100$h et l'état de chacun des transistors qui équipe cet étage est indépendant de l'état des autres.

Quelle est la probabilité qu'aucun des 5 transistors qui équipe cet étage d'oscilloscope ne soit à remplacer durant les 250 premières heures de fonctionnement de l'appareil ?

3] **Changement de variable aléatoire**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi de probabilité de densité de probabilité :

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

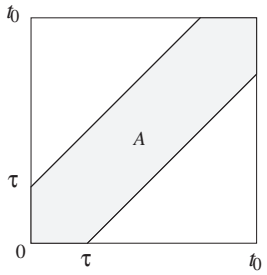
3.1] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2$.

3.2] Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z \stackrel{\text{def}}{=} X_1^2 + X_2^2$. Préciser la loi de probabilité obtenue.

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11

1] **Modélisation d'expérience aléatoire : Compteur de particules inhibé**

1.1] L'expérience aléatoire est modélisée par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = [0, t_0] \times [0, t_0]$, $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω dont on sait définir des "surfaces" (les boréliens de Ω) et P est l'application probabilité uniforme sur Ω.



1.2] L'événement {une particule n'est pas enregistrée} est alors le domaine A hachuré de Ω. Par suite

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(\Omega)} = \frac{t_0^2 - (t_0 - \tau)^2}{t_0^2} = \frac{2t_0\tau - \tau^2}{t_0^2} \approx \frac{2\tau}{t_0} \quad \text{pour } \tau \ll t_0$$

2] **Probabilité d'événement, variable aléatoire**

Désignons par $X_k, k = 1.., 5$, les durées de vie de chacun des 5 transistors. L'événement cherché est alors

$$\{\bigcap_{k=1}^{5} X_k > 250\}.$$

Par suite la probabilité cherchée P vaut grace à l'indépendance des variables aléatoires $X_k, k = 1.., 5$:

$$P = P(\bigcap_{k=1}^{5}\{X_k > 250\}) = \prod_{k=1}^{5} P(X_k > 250) = \left(\int_{250}^{+\infty} f_X(x)dx\right)^5 = \left(\int_{250}^{+\infty} \frac{a}{x^2}dx\right)^5 = \left(\frac{100}{250}\right)^5 \approx 0.01$$

3] **Changement de variable aléatoire**

3.1]

$$F_Y \stackrel{\text{def}}{=} P(Y < y) = P(X_1^2 < y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

avec $P(\sqrt{y} < X_1 < \sqrt{y}) = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$. Soit :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{y}} .\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3.2] Deux méthodes sont possibles: La première passe par la fonction de répartition de la variable aléatoire Z et la deuxième calcule directement le densité de probabilité de la variable aléatoire Z à l'aide du produit de convolution (rel. [II.23a]) des densités de probabilité de X_1^2 et X_2^2 obtenues à la question 3.1] car X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.

$$F_Z \stackrel{\text{def}}{=} P(Z < z) = P(X_1^2 + X_2^2 < z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

avec $\Delta_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2),\ x_1^2 + x_2^2 < z\}$. Soit grâce à l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

$$
\begin{aligned}
P[(X_1, X_2) \in \Delta_z] &= \iint_{\Delta_z} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta_z} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \iint_{\Delta_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}} dx_1 dx_2 = \iint_{\Delta'_z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = \left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}
$$

avec $\Delta'_z \stackrel{\text{def}}{=} \{(r, \theta),\ r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\}$

Soit :

$$
f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z).
$$

Par suite Z est de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$.

Ce résultat peut s'obtenir directement moyennant un petit calcul d'intégrale :

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_Y(z-y) dy = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} dy \right) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)
$$

avec

$$
\int_0^z \frac{1}{\sqrt{y(z-y)}} dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = \pi \qquad (\text{avec } t = \sin^2 u)
$$

Ce qui redonne $f_Z(z) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 24.2.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants". On rappelle la notation $\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

1] **Discrétisation de la loi de probabilité exponentielle, loi géométrique**

Soit une variable aléatoire X de loi exponentielle

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

1.1] Calculer $\mathrm{E}(X)$ et déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$.
1.2] On associe à X, sa partie entière X_e et sa partie fractionnaire X_f définies par

$$X = X_e + X_f \qquad \text{avec } X_e \in \mathbb{N} \text{ et } X_f \in [0,1[.$$

Déterminer les probabilités $P(X_e = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_e.
1.3] Calculer $\mathrm{E}(X_e)$ (on utilisera l'identité $\sum_{k=0}^{+\infty} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2}$ pour $p \in]0,1[$). Comparer cette espérance mathématique à celle de la variable aléatoire X. Commentaire ? Que se passe t'il si $\lambda \ll 1$?
1.4] Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_f. En déduire la densité de probabilité $f_{X_f}(x)$.
1.5] Démontrer que les variables aléatoires X_e et X_f sont indépendantes. (on utilisera pour critère d'indépendance dans le cas de 2 variables aléatoires X et Y où X est discrète entière et Y continue :

$$P[(X = k) \cap (Y < y] = P[X = k]P[Y < y], \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ \forall\, y \in \mathbb{R}$$

1.6] Soit $Y = uX$ avec u constante strictement positive. Démontrer que

$$\lim_{u \to \infty} P(Y_f \in [a,b[) = b - a, \quad \forall a, b \in [0,1]$$

(On commencera par déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = uX$). Interprétation ?

2] **Loi de probabilité conditionnelle**

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}[1 + \sin x \cos y]\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]^2}(x,y)$$

2.1] Déterminer les densités de probabilités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$, les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
2.2] Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ puis $\mathrm{Cov}(X,Y)$, les variables aléatoires X et Y sont elles corrélées ?
2.3] Déterminer la densité de probabilité conditionnelle $f_{X/Y=y}(x)$.
2.4] En déduire l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(X/Y=y)$.

Correction très succincte du deuxième contrôle de connaissance de PS11 (les références citées sont celles du résumé de cours du polycopié)

1] **Discrétisation de la loi de probabilité exponentielle, loi géométrique**

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt = (1-e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1.2]

$$P(X_e = k) = P(X \in [k, k+1[) = F_X(k+1) - F_X(k) = (1-e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Par suite la variable aléatoire X_e est de loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (0 compris, donc en décalage par rapport à la définition habituelle [rel. 2.5]).
1.3]

$$\mathrm{E}(X_e) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X_e = k) = (1-e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{+\infty} k (e^{-\lambda})^k = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda}-1} < \frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}(X).$$

Cette inégalité s'explique car X_e est une approximation entière de X par défaut. Quand $\lambda \ll 1$, $\mathrm{E}(X_e) \approx \mathrm{E}(X)$, ce qui s'explique par une densité très "aplatie où $\mathrm{E}(X_e)$ devient une bonne approximation de $\mathrm{E}(X)$.
1.4] La variable aléatoire continue X_f a valeur dans $[0,1[$ et a pour fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F_{X_f}(x) &= P(X_f < x) = P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} X \in [k, k+x[\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X \in [k, k+x[) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \mathbb{1}_{[0,+1[}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \end{aligned}$$

$$f_{X_f}(x) = \frac{dF_{X_f}(x)}{dx} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \mathbb{1}_{[0,+1[}(x).$$

1.5] Les événements $X_e = k$ et $X_f < x$ vérifient $(X_e = k) \cap (X_f < x) = (X \in [k, k+x[) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0,1[$. Par suite :

$$\begin{aligned} P[(X_e = k) \cap (X_f < x] &= P(X \in [k, k+x[) = F_X(k+x) - F_X(k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda x}) \\ &= \left[(1-e^{-\lambda}) e^{-\lambda k}\right] \left[\frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}\right] = P[X_e = k] P[X_f < x], \end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires X_e et X_f sont indépendantes.
1.6]

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < \frac{y}{u}) = F_X(\frac{y}{u}) = (1-e^{-\lambda y/u}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y),$$

soit une loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{u}$. Par suite d'après 1.4]

$$\begin{aligned} P(Y_f \in [a,b[) &= F_{Y_f}(b) - F_{Y_f}(a) = \frac{1-e^{-\lambda b/u}}{1-e^{-\lambda/u}} - \frac{1-e^{-\lambda a/u}}{1-e^{-\lambda/u}} \\ &\sim \frac{\frac{\lambda}{u}b - \frac{\lambda}{u}a}{\frac{\lambda}{u}} = b-a \quad \forall a,b \in [0,1[\text{ pour } u \to \infty \end{aligned}$$

La partie fractionnaire de Y converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur [0,1] quand $u \to \infty$. C'est naturel car l'amplification de X entraîne un "aplatissement" de la densité de Y.

2] **Loi de probabilité conditionnelle**
2.1] D'après le cours [rel. II.15] :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(y),$$

soit des lois de probabilités uniformes sur $[-\pi,+\pi]$. Puisque $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
2.2] D'après la définition de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2\pi}dx = 0. \\ \mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{y}{2\pi}dy = 0. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le théorème de transfert [rel. III.7c] pour l'application $(X,Y) \longmapsto XY$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(XY) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} xy[1+\sin x\cos y]dxdy = 0 \end{aligned}$$

en utilisant les parités. Par suite les variables aléatoires X et Y sont non corrélées.
2.3] Par définition [rel. VI.5]

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\pi}[1+\sin x\cos y]\mathbb{1}_{[-\pi,+\pi]}(x)$$

pour $y \in [-\pi,+\pi]$.
2.4] Par définition [rel. VI.5]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X/Y=y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x[1+\sin x\cos y]dx \\ &= 0 + \frac{\cos y}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin x dx = \frac{\cos y}{2\pi}\left([-x\cos x]_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi}\cos x dx\right) = \cos y. \end{aligned}$$

pour $y \in [-\pi,+\pi]$.

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème session)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seule deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 19.3.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants".

1] **Variable aléatoire bidimensionnelle**

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi de probabilité uniforme sur $[0,1]$.

1.1] Soient $Y_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sup}(X_1, X_2)$ et $Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Inf}(X_1, X_2)$. Déterminer la densité de probabilité de la nouvelle variable aléatoire $Z \stackrel{\text{def}}{=} Y_1 - Y_2$ (après avoir exprimé Z à l'aide de X_1 et X_2).

1.2] Calculer par la méthode de votre choix (par le théorème de transfert ou sans théorème de transfert) $\text{E}(Z)$ et $\text{var}(Z)$.

1.3] Soient $Y_3 \stackrel{\text{def}}{=} X_1 X_2$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_3 puis sa densité de probabilité.

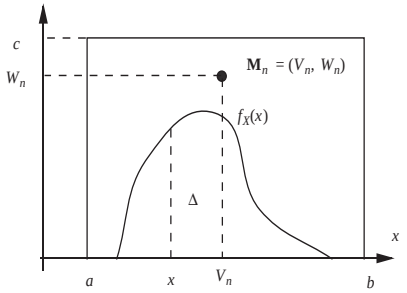
1.4] Calculer par la méthode de votre choix (par le théorème de transfert ou sans théorème de transfert) $\text{E}(Y_3)$ et $\text{var}(Y_3)$.

2] **Génération de variable aléatoire par la méthode de rejet**

Considérons la génération d'une variable aléatoire X continue de densité de probabilité $f_X(x)$ bornée à support inclus dans $[a,b]$ avec c un nombre tel que $f_X(x) \leq c$, à partir d'une suite U_n de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0,1].

2.1] Démontrer qu'on peut générer une suite de points $\mathbf{M}_n = (V_n, W_n)$ uniformément répartis sur le rectangle $[a,b] \times [0,c]$ à partir de la suite U_n.

2.2] On réalise l'algorithme suivant, si le point $\mathbf{M}_n$ est dans domaine Δ situé sous la densité de probabilité $f_X(x)$, nous définissons X par la valeur de V_n. Si le point $\mathbf{M}_n$ est en dehors du domaine Δ, nous tirons le point $\mathbf{M}_{n+1} = (V_{n+1}, W_{n+1})$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un point $\mathbf{M}_n$ soit dans Δ. Décomposer l'événement $\{X < x\}$ en une union dénombrable d'événements faisant intervenir $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



2.3] En déduire la fonction de répartition $F_X(x)$ puis la densité de probabilité de la variable aléatoire X obtenue par cet algorithme.

2.4] Calculer le nombre moyen de réalisations de termes de la suite U_n par réalisation d'une variable aléatoire X (on utilisera $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$ pour $p \in]0,1]$)? Commentaires sur cet algorithme.

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11 de deuxième session 2006/2007

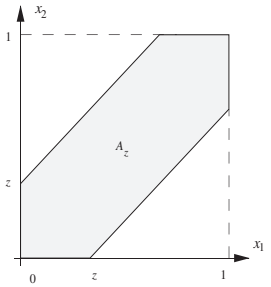
1] **Variable aléatoire bidimensionnelle**

Notons que grâce à l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x_1,x_2).$$

1.1] Puisque $Z = |X_1 - X_2|$.

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(|X_1 - X_2| < z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ P[(X_1,X_2) \in \Delta_z] & \text{si } 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$



avec $P[(X_1,X_2) \in \Delta_z] = \int\int_{\Delta_z} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \text{Aire}(\Delta_z) = 1-(1-z)^2 = 2z - z^2$.
Par suite

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = (2-2z)\mathbb{1}_{[0,1]}(z)$$

1.2] Ici la méthode directe (sans théorème de transfert) est préférable car elle conduit à un calcul plus simple. En effet

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)dz = \int_0^1 (2z - 2z^2)dz = [z^2]_0^1 - \frac{2}{3}[z^3]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

De même :

$$\mathrm{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)dz = \int_0^1 (2z^2 - 2z^3)dz = \frac{2}{3}[z^3]_0^1 - \frac{1}{2}[z^4]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Par suite :

$$\mathrm{var}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - [\mathrm{E}(Z)]^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

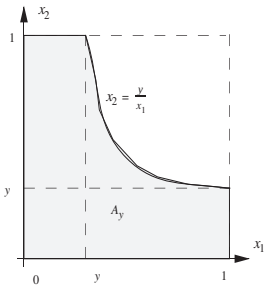
Remarque: Le calcul par le théorème de transfert aurait été ici maladroit car un peu plus long :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x_1 - x_2| f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = 2\int_0^1 \left(\int_0^{x_1} (x_1 - x_2)dx_2\right)dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1^2 - \frac{x_1^2}{2})dx_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1-x_2|^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^1 (x_1-x_2)^2dx_2\right)dx_1\\ &= \int_0^1\left(\frac{x_1^3-(x_1-1)^3}{3}\right)dx_1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

1.3] De même :

$$F_{Y_3}(y) = P(Y_3<y) = P(X_1X_2<y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0\\ P[(X_1,X_2)\in\Delta_y] & \text{si } 0\le y\le 1\\ 1 & \text{si } y>1\end{cases}$$



avec $P[(X_1,X_2)\in\Delta_y] = \int\int_{\Delta_y} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{Aire}(\Delta_y) = y+\int_y^1 \frac{y}{x_1}dx_1 = y - y\ln y$.
Par suite

$$f_{Y_3}(y) = \frac{dF_{Y_3}(y)}{dy} = -\ln(y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1.4] Ici la méthode par le théorème de transfert est préférable car elle conduit à un calcul plus simple. En effet

$$\mathrm{E}(Y_3) = \int_0^1\int_0^1 x_1x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

car $\mathrm{E}(X_1) = \int_0^1 x_1dx_1 = \frac{1}{2}$. De même

$$\mathrm{E}(Y_3^2) = \int_0^1\int_0^1 x_1^2x_2^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \mathrm{E}(X_1^2)\mathrm{E}(X_2^2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

car $\mathrm{E}(X_1^2) = \int_0^1 x_1^2dx_1 = \frac{1}{3}$. Par suite :

$$\mathrm{var}(Y_3) = \mathrm{E}(Y_3^2) - [\mathrm{E}(Y_3)]^2 = \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}.$$

Remarque: Le calcul direct aurait été ici maladroit car plus compliqué. En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_3}(y)dy = -\int_0^1 y\ln(y)dy = \left[-\frac{y^2}{2}\ln(y)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{y^2}{2}\frac{dy}{y} = 0-0+\int_0^1\frac{y}{2}dy = \frac{1}{4}\\ \mathrm{E}(Y_3^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y_3}(y)dy = -\int_0^1 y^2\ln(y)dy = \left[-\frac{y^3}{3}\ln(y)\right]_0^1 + \int_0^1\frac{y^3}{3}\frac{dy}{y} = 0-0+\int_0^1\frac{y^2}{3}dy = \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

2] **Génération de variable aléatoire par la méthode de rejet**

2.1] Le changement de variables aléatoires

$$V_n = a+(b-a)U_{2n} \quad \text{et} \quad W_n = cU_{2n+1}$$

assure que V_n et W_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de probabilités uniformes sur respectivement $[a,b]$ et $[0,c]$, donc que le point $\mathbf{M}_n$ sera uniformément réparti sur le rectangle $[a,b]\times[0,c]$ (dit choix au hasard de ce point dans ce rectangle).

2.2] Par construction :

$$X=\begin{cases} V_0 & \text{si } \mathbf{M}_0\in\Delta \\ V_1 & \text{si } \mathbf{M}_0\notin\Delta \text{ et } \mathbf{M}_1\in\Delta \\ .. & .... \\ V_n & \text{si } \mathbf{M}_0\notin\Delta,\ \mathbf{M}_1\notin\Delta,\ ...\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta \text{ et } \mathbf{M}_n\in\Delta \end{cases}.$$

Par suite l'événement $\{X<x\}$ est la union dénombrable d'événements incompatibles suivants :

$$\{X<x\}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\{\mathbf{M}_0\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}\cap...\cap\{\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_n\in\Delta\}\cap\{V_n<x\}\right).$$

2.3] Puisque les événements $\{\mathbf{M}_0\notin\Delta\}$, $\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}$,..., $\{\mathbf{M}_{n-1}\notin\Delta\}$ et $\{\mathbf{M}_n\in\Delta\}\cap\{V_n<x\}$ sont indépendants, on déduit :

$$F_X(x)\overset{\text{def}}{=}P(X<x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n-1}P(\mathbf{M}_k\notin\Delta)\right)\left(P\left((\mathbf{M}_n\in\Delta)\cap(V_n<x)\right)\right).$$

Avec $P(\mathbf{M}_k\in\Delta)=\frac{Aire(\Delta)}{c(b-a)}=\frac{1}{c(b-a)}$ puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_a^b f_X(x)dx=1$
et $P((\mathbf{M}_n\in\Delta)\cap(V_n<x))=\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}$, on obtient :

$$F_X(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[1-\frac{1}{c(b-a)}]^n\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}=\frac{1}{[1-(1-\frac{1}{c(b-a)}]}\frac{\int_c^x f_X(t)dt}{c(b-a)}=\int_c^x f_X(t)dt.$$

Et la variable aléatoire ainsi générée a bien la loi de probabilité désirée de densité de probabilité $f_X(x)$.

2.4] D'après l'énoncé il faut 2 termes de la suite U_n par point $\mathbf{M}_n$ et le nombre N nécessaire de points $\mathbf{M}_n$ est aléatoire avec pour probabilité :

$$\begin{aligned} P(N=n) &= P(\mathbf{M}_0\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_1\notin\Delta\}\cap...\cap\{\mathbf{M}_{n-2}\notin\Delta\}\cap\{\mathbf{M}_{n-1}\in\Delta\},\quad n\in\mathbb{N}^* \\ &= [1-\frac{1}{c(b-a)}]^{n-1}\frac{1}{c(b-a)}, \end{aligned}$$

soit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{c(b-a)}$. Par suite

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=c(b-a).$$

Par suite le nombre moyen de réalisations de termes de la suite U_n par réalisation d'une variable aléatoire X est $2\mathrm{E}(N)=2c(b-a)$.

Commentaires :

On voit donc l'intérêt de choisir le plus petit majorant c de $f_X(x)$ et le plus petit domaine $[a,b]$ à l'intérieur du support de $f_X(x)$.

D'autre part, puisque $P(\mathbf{M}_n\notin\Delta)=1-\frac{1}{c(b-a)}$, la probabilité que tous les points $\mathbf{M}_n$ n'appartiennent pas à Δ est $P(\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathbf{M}_n\notin\Delta)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}P(\mathbf{M}_k\notin\Delta)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{c(b-a)})^n=0$. Il n'y a donc presque sûrement qu'un nombre fini de tirages avant que $\mathbf{M}_n$ soit dans Δ, ce qui est "rassurant".

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

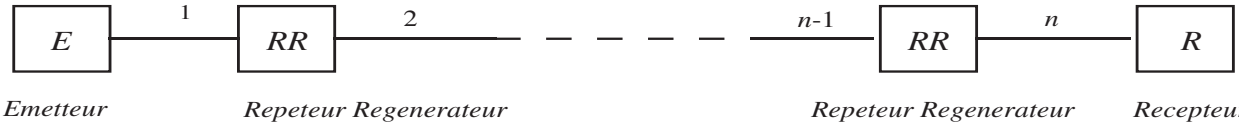
Module PS 11 : Probabilités (1ère partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (une page manuscrite A4 est autorisée)
Date : 16.11.2007
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1 ou 2):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, *si possible dans les limites qui vous sont proposées*. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les deux exercices sont "indépendants".

1] **Probabilité cumulée d'erreur**

On considère une transmission numérique sur fibre optique transatlantique constituée de n tronçons.



Considérons la transmission d'une information binaire (bit). Ce bit est transmis sur le canal de transmission avec une probabilité d'erreur p sur chacun des n tronçons. Les erreurs sont indépendantes entre les tronçons. Chaque répéteur régénérateur détecte l'information binaire et la retransmet sur le tronçon suivant.

1.1] Exprimer la probabilité d'erreur globale dans les cas particuliers $n = 2, 3$. Puis en donner une expression générale P_n(erreur) en fonction de n et p, (on pourra distinguer le cas n pair et n impair).

1.2] Pour obtenir une expression générale plus lisible, après avoir exprimé l'événement {erreur globale sur n tronçons} à l'aide de l'événement {erreur globale sur $n-1$ tronçons}, calculer P_n(erreur) en fonction de P_{n-1}(erreur) et de p. En déduire une formule analytique donnant P_n(erreur) en fonction de n et p, (on pourra utiliser la propriété $u_n = a + bu_{n-1} \Rightarrow \left(u_n - \frac{a}{1-b}\right) = b\left(u_{n-1} - \frac{a}{1-b}\right)$). Quelle est la limite de P_n(erreur) pour $n \to \infty$. Interprétation.

2] **Changement de variable aléatoire**

Soient U_1 et U_2, deux variables aléatoires indépendantes et de loi de probabilité uniforme sur $]0, 1]$ et a_1 et a_2, deux constantes strictement positives. On considère les trois variables aléatoires X, Y et Z définies par

$$X = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1), \quad Y = -\frac{1}{a_2}\ln(U_2) \quad \text{et} \quad Z = -\frac{1}{a_1}\ln(U_1) - \frac{1}{a_2}\ln(U_2).$$

où ln(.) désigne le logarithme népérien.

2.1] Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$, puis la densité de probabilité $f_X(x)$ de la variable aléatoire X.

2.2] Retrouver directement $f_X(x)$ à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.

2.3] En déduire la densité de probabilité $f_{X,Y}(x, y)$ du couple de variable aléatoire (X, Y), puis calculer $P(X > Y)$. Interprétation ?

2.4] En observant que $Z = X + Y$, déterminer directement la densité de probabilité $f_Z(z)$

2.5] Dans le cas particulier où $a_1 = a_2 = a$, déterminer directement la fonction de répartition $F_Z(z)$, puis la densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire Z.

2.6] Dans le cas général $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$, déterminer la densité de probabilité $f_{X,Z}(x,z)$ du couple de variable aléatoire (X,Z) à l'aide de la formule du changement de variable bijectif.
2.7] En déduire à nouveau $f_Z(z)$ (on distinguera les cas $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$).

Correction très succincte du premier contrôle de connaissance de PS11
1] **Probabilité cumulée d'erreur**
1.1] Puisque {erreur globale sur 2 tronçons}={une seule erreur sur 2 tronçons}, $P_2(\text{erreur}) = 2p(1-p)$; {erreur globale sur 3 tronçons}={une seule ou trois erreurs sur 3 tronçons}, $P_3(\text{erreur}) = 3p(1-p)^2 + p^3$. Dans le cas général :

{erreur globale sur n tronçons}={un nombre impair d'erreurs sur n tronçons}, par suite

$$P_n(\text{erreur}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ impair} \\ \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} p^{2k+1}(1-p)^{n-(2k+1)} & n \text{ pair} \end{array} \right.$$

1.2] En notant E_n={erreur globale sur n tronçons} et E={erreur sur le tronçon n}, nous avons

$$E_n = \left(E_{n-1} \cap \bar{E}\right) \cup \left(\bar{E}_{n-1} \cap E\right).$$

Puisque qu'il s'agit d'une union de deux événements incompatibles et que les erreurs sur différents canaux sont indépendantes

$$P_n(\text{erreur}) = (1-p)P_{n-1}(\text{erreur}) + p(1 - P_{n-1}(\text{erreur}))$$

D'ou la relation de récurrence $P_n(\text{erreur}) = p + (1-2p)P_{n-1}(\text{erreur})$. Par suite : $\left(P_n(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)\left(P_{n-1}(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$, soit $P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2} + (1-2p)^{n-1}\left(P_1(\text{erreur}) - \frac{1}{2}\right)$ et avec $P_1(\text{erreur}) = p$, on obtient

$$P_n(\text{erreur}) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2p)^n\right).$$

Il s'agit naturellement d'une fonction décroissante de p qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand le nombre n de tronçons tend vers ∞ : la pire des situations où le récepteur joue à pile ou face ! Remarquons que l'approximation $P_n(\text{erreur}) \approx np$ n'est valide que si $np \ll 1$.

2] **Changement de variable aléatoire**
2.1]

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X < x) = P\left(-\frac{1}{a_1}\ln(U_1) < x\right) = P(U_1 > e^{-a_1 x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-a_1 x} & \text{si } x \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Par suite $f_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_X(x)}{dx} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Soit une loi de probabilité exponentielle de paramètre a_1.
2.2] Le changement de variable $U_1 \in]0,1] \longmapsto X \in [0,+\infty[$ est bijectif monotone décroissant. Par suite

$$f_X(x) = \frac{1}{|\frac{dx}{du_1}|} f_{U_1}(u_1)_{|u_1 = e^{-a_1 x}} = a_1 e^{-a_1 x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x),$$

car $\frac{dx}{du_1} = -\frac{1}{a_1 u_1} = -\frac{1}{a_1 e^{-a_1 x}}$ et $f_{U_1}(u_1) = \mathbb{1}_{]0,1]}(u_1)$.
2.3] Puisque les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes, X et Y fonctions chacune de variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Par suite

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = a_1 a_2 e^{-(a_1 x + a_2 y)} \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y).$$

$$
\begin{aligned}
P(X>Y) &= \iint_{x>y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^x a_1a_2e^{-(a_1x+a_2y)}dy\right]dx = \int_0^{+\infty} a_1e^{-a_1x}\left[\int_0^x a_2e^{-a_2y}dy\right]dx \\
&= 1-\int_0^{+\infty} a_1e^{-(a_1+a_2)x}dx = \frac{a_2}{a_1+a_2}\begin{cases} =1/2 & \text{si } a_1=a_2 \\ <1/2 & \text{si } a_1>a_2 \\ >1/2 & \text{si } a_1<a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Ce dernier résultat s'interprète : pour $a_1 = a_2$, les variables aléatoires X et Y de même loi de probabilité et indépendantes ont chacune même chance d'être plus grande que l'autre. Pour $a_1 > a_2$, la variable aléatoire X est plus concentrée vers l'origine que la variable aléatoire Y, donc a moins de chance d'être plus petite et $P(X > Y) < 1/2$.

2.4] Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la densité de probabilité $f_Z(z)$ est le produit de convolution des densités de probabilité $f_X(z)$ et $f_Y(z)$, soit

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(z-t)dt = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1t}e^{-a_2(z-t)}dt \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)t}dt = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

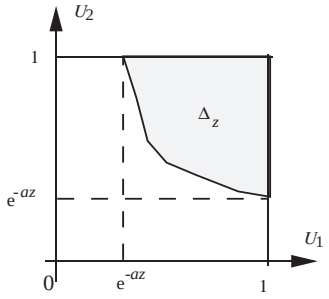
2.5]

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &\overset{\text{def}}{=} P(Z<z) = P\left(-\frac{1}{a}\ln(U_1)-\frac{1}{a}\ln(U_2)<z\right) = P(U_1U_2>e^{-az}) \\
&= \begin{cases} \iint_{\Delta_z} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)du_1du_2 = \iint_{\Delta_z} du_1du_2 & \text{si } z\geq 0 \\ P(\emptyset)=0 & \text{si } z<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

car

$$
\begin{aligned}
f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) &= f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2) \\
&= \mathbb{1}_{]0,1]\times]0,1]}(u_1,u_2)
\end{aligned}
$$

(loi uniforme sur le carré $]0,1]\times]0,1]$).
avec $\Delta_z \overset{\text{def}}{=} \{(u_1,u_2)$ tel que $0<u_1\leq 1; 0<u_2\leq 1$ et $u_1u_2>e^{-az})\}$.



On obtient géométriquement par un calcul de surface pour $z \geq 0$

$$
\iint_{\Delta_z} du_1du_2 = 1-\left(e^{-az}+\int_{e^{-az}}^1 \frac{e^{-az}}{u}du\right) = 1-\left(e^{-az}\left(1+\left(\ln 1-\ln e^{-az}\right)\right)\right) = 1-e^{-az}(1+az).
$$

Soit

$$
F_Z(z) = \left(1-e^{-az}(1+az)\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) \quad \text{et} \quad f_Z(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{dF_Z(z)}{dz} = a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).
$$

2.6] Puisque le changement de variable aléatoire $(U_1,U_2) \in]0,1]\times]0,1] \longmapsto (X,Z) \in \Delta$ est bijectif avec $\Delta \overset{\text{def}}{=} \{(x,z)$ tel que $0<e^{-a_1x}\leq 1$ et $0<e^{-a_2(z-x)}\leq 1\} = \{(x,z)$ tel que $x>0$ et $z-x>0\}$. Par suite la formule du changement de variable bijectif donne :

$$
f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{\left|\text{Det}\begin{pmatrix} \frac{dx}{du_1} & \frac{dx}{du_2} \\ \frac{dz}{du_1} & \frac{dz}{du_2} \end{pmatrix}\right|} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)\big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1/a_1u_1 & 0 \\ -1/a_1u_1 & -1/a_2u_2 \end{pmatrix}\right|}\Big|_{u_1=e^{-a_1x},u_2=e^{-a_2(z-x)}} 1_\Delta(x,z) \\
&= a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}\mathbb{1}_\Delta(x,z).
\end{aligned}
$$

2.7] La densité de probabilité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire marginale Z issue du couple (X,Z) est donnée par :

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Z}(x,z)dx = \int_0^z a_1a_2e^{-a_1x}e^{-a_2(z-x)}dx \\
&= a_2e^{-a_2z}\int_0^z a_1e^{-(a_1-a_2)x}dx = \begin{cases} a^2ze^{-az}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1=a_2=a \\ \frac{a_1a_2}{a_1-a_2}\left(e^{-a_2z}-e^{-a_1z}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) & \text{si } a_1\neq a_2 \end{cases}.
\end{aligned}
$$

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS
GROUPE DES ECOLES DE TELECOMMUNICATION
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (2ème partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (seules deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 30.1.2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3):

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les quatre exercices sont "indépendants". On rappelle la notation $\mathbb{1}_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

1] **Entropie d'une variable aléatoire gaussienne**

En théorie de l'information, on définit l'entropie $H(X)$ d'une variable aléatoire continue X monodimentionnelle ou multidimentionnelle de densité de probabilité $f_X(x)$ par $H(X) = \mathrm{E}[-\log_2 f_X(X)]$ (où $\log_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$).

1.1] Calculer l'entropie $H(X)$ de la variable aléatoire gaussienne monodimentionnelle centrée de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).$$

1.2] Calculer l'entropie $H(X_1, X_2)$ de la variable aléatoire gaussienne bidimentionnelle à composantes centrées de mêmes variances σ^2 et corrélées de coefficient de corrélation ρ, de densité de probabilité

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\left(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2\right)\right).$$

2] **Variable aléatoire gaussienne**

Soient X, Y et Z, trois variables aléatoires gaussiennes centrées de variance unité et indépendantes.

2.1] Quelle est la loi de probabilité de $U = X + Y + Z$?

2.2] Les variables aléatoires U et $X - Y$ sont elles indépendantes ?

3] **Loi de probabilité conditionnelle**

Soit la variable aléatoire bidimensionnelle (X, Y) de densité de probabilité

$$f_{X,Y}(x, y) = (x + y)\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y).$$

3.1] Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3.2] Déterminer la densité de probabilité $f_X(x)$, en déduire la densité de probabilité conditionnelle $f_{Y/X=x}(y)$.

3.3] Calculer l'espérance mathématique conditionnelle $\mathrm{E}(Y/X = x)$. En déduire l'approximation $\hat{y}(x)$ de y fonction de x au sens de $\min_{\hat{Y}(X)} \mathrm{E}([\hat{Y}(X) - Y]^2)$.

4] **Génération de variable aléatoire**

On dispose d'un générateur de variables aléatoire indépendantes W_n discrètes prenant les valeurs équiprobables 0 et 1. Démontrer qu'on peut en déduire un générateur de variables aléatoire indépendantes X_n prenant les valeurs 0 et 1 avec $P(X_n = 1) = \frac{1}{4}$ et $P(X_n = 0) = \frac{3}{4}$. Généraliser avec $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = 1 - p$ pour $p \in [0, 1]$ quelconque représentable par un nombres binaire de 64 bits.

Que peut on conclure quant à la génération d'une suite Y_n de variables aléatoires indépendantes de loi de probabilité uniforme sur [0,1] ?

Correction succincte du contrôle de connaissance de PS11 de deuxième partie 2007/2008

1] **Entropie d'une variable aléatoire gaussienne**

1.1] $\log_2(f_X(x)) = -\log_2(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{x^2}{2\sigma^2}\log_2 e$. Par suite d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} H(X) &= \mathrm{E}[-\log_2 f_X(X)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log_2[f_X(x)] f_X(x) dx \\ &= \log_2 e(\sigma\sqrt{2\pi}) + \left(\frac{\mathrm{E}(X^2)}{2\sigma^2}\right)\log_2 e = \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}) \end{aligned}$$

car $\mathrm{E}(X^2) = \sigma^2$.

1.2] $\log_2(f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)) = -\log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) - \frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\log_2 e$. Par suite d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} H(X_1, X_2) &= \mathrm{E}[-\log_2 f_{X_1,X_2}(X_1, X_2)] = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \log_2[f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)] f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 x_2 \\ &= \log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) + \left(\frac{\mathrm{E}(X_1^2) - 2\rho\mathrm{E}(X_1X_2) + \mathrm{E}(X_2^2)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)\log_2 e \\ &= \log_2(2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}) + \log_2 e = \log_2[\sigma^2 2\pi e\sqrt{1-\rho^2}] \end{aligned}$$

car $\mathrm{E}(X_1^2) = \mathrm{E}(X_2^2) = \sigma^2$ et $\mathrm{E}(X_1X_2) = \rho\sigma^2$.

2] **Variable aléatoire gaussienne**

2.1] D'après l'énoncé la variable aléatoire à trois dimensions (X, Y, Z) est gaussienne. Par suite U combinaison linéaire des trois composantes X, Y et Z de U est une variable aléatoire de loi de probabilité gausienne avec

$$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{var}(U) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + \mathrm{var}(Z) = 3.$$

2.2] Puisque la variable aléatoire (U, V) avec $V = X - Y$, combinaison linéaire de X, Y et Z est gaussienne à deux dimensions, U et V sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées. Or

$$\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}[(X + Y + Z)(X - Y)] = \mathrm{E}[X^2 + XZ - Y^2 - ZY] = 1 + 0 - 1 - 0 = 0,$$

car $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{var}(X) = 1$ et $\mathrm{E}(XZ) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z) = 0$. De même pour $\mathrm{E}(Y^2)$ et $\mathrm{E}(ZY)$. Donc les variables aléatoires U et V sont non corrélées, et par suite sont indépendantes.

3] **Loi de probabilité conditionnelle**

3.1] D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1\int_0^1 x(x + y) dx dy \\ &= \left(\int_0^1 x^2 dx\right)\left(\int_0^1 dy\right) + \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 y dy\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

De même $\mathrm{E}(Y) = \frac{7}{12}$. Puis d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy \\ &= 2\left(\int_0^1 x^2dx\right)\left(\int_0^1 ydy\right) = 2\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Puis

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144}.$$

3.2]

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \left(\int_0^1 (x+y)dy\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (x+\frac{1}{2})\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Par suite :

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(x+y)}{2x+1}\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \quad \text{pour} \quad x \in [0,1].$$

3.3] Par projection :

$$\mathrm{E}(Y/X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X=x}(y)dy = \int_0^1 \frac{2y(x+y)}{2x+1}dy = \frac{2x}{2x+1}\frac{1}{2} + \frac{2}{2x+1}\frac{1}{3} = \frac{3x+2}{3(2x+1)}.$$

Par suite $\hat{y}(x) = \frac{3x+2}{3(2x+1)}$ est la meilleure approximation de y fonction de x au sens de $\min_{\hat{Y}(X)} \mathrm{E}([\hat{Y}(X)-Y]^2)$.

4] **Génération de variable aléatoire**

Il suffit de considérer les 4 valeurs possibles du couple binaire (W_{2n-1}, W_{2n}) et faire l'association :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (W_{2n-1}, W_{2n}) = (00) \\ 0 & \text{si } (W_{2n-1}, W_{2n}) = (01), (01) \text{ ou } (11) \end{cases}$$

Par suite $P(X_n = 1) = P(W_{2n-1}, W_{2n}) = (00) = \frac{1}{4}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

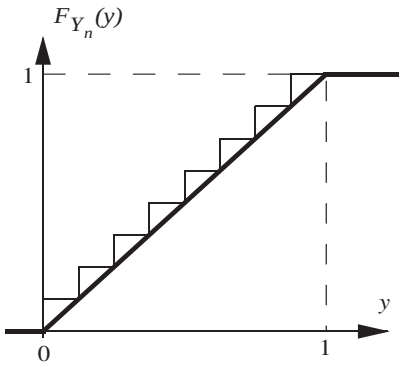
Cette méthode s'étend pour n'importe quelle valeur de p représentable avec un ordinateur qui travaille avec des nombres de 64 bits, soit pour $p = \sum_{k=1}^{64} a_k 2^{-k}$ avec $a_k \in \{0,1\}$:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k} < p \\ 0 & \text{si } \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k} \geq p \end{cases}$$

Par suite, cette méthode peut être utilisée pour générer une suite Y_n de variables aléatoires discrètes indépendantes de loi de probabilité uniforme sur $\{0, 1.2^{-64}, 2.2^{-64}, ..., k.2^{-64}, ..., 1-2^{-64}\}$ à l'aide de

$$Y_n = \sum_{k=1}^{64} W_{64n-k}2^{-k},$$

c'est à dire suivant approximativement (au sens $F_{Y_n}(y) \approx y\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(y)$) une loi de probabilité uniforme sur [0,1]. Ainsi pour 3 bits :



TELECOM et Management SudParis
Institut TELECOM
CONTROLE DE CONNAISSANCES

Module PS 11 : Probabilités (deuxième partie)
Durée : 1,5 H
Sans document et sans calculatrice (deux pages manuscrites A4 sont autorisées)
Date : 26 Mars 2008
Coordonnateur : DELMAS Jean Pierre

Nom : Prénom : Année (1,2,3)

Justifier chaque réponse de façon concise. Répondre sur le questionnaire même, si possible dans les limites qui vous sont proposées. Il est conseillé de faire un rapide brouillon sur une feuille à part avant de reporter votre réponse. Les trois exercices sont "indépendants".

1] **Cerise sur le gâteau**

On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1.1] Quelle est la probabilité que la part contenant la cerise soit plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?

1.2] Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ? Commentaires ?

2] **File d'attente**

Trois clients A, B et C se présentent à deux guichets libres. A et B sont servis immédiatement et C attend que l'un des deux guichets se libère avant de pouvoir être servi. On suppose que les temps de service X_A, X_B et X_C de A, B et C respectifs sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité exponentielle de paramètre λ ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$).

2.1] Soit Y_C le temps d'attente de C et Z_C le temps passé par C dans le système (attente+service). Exprimer Y_C et Z_C en fonction de X_A, X_B et X_C.

2.2] Calculer la fonction de répartition, puis la densité de probabilité de la variable aléatoire Y_C ?

2.3] Calculer la densité de probabilité de la variable aléatoire Z_C ?

3] **Loi de probabilité exponentielle**

Soit deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de même loi exponentielle de paramètre identique λ ($f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$).

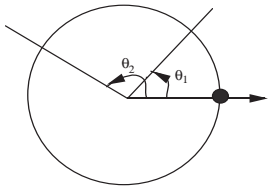
3.1] Calculer $P(X_1 < aX_2)$ pour $a > 0$.

3.2] En déduire la probabilité conditionnelle $P(X_1 < X_2 / X_1 < 2X_2)$. Commentaires ?

Correction très succincte du contrôle de connaissance de PS11 deuxième partie

1] **Cerise sur le gâteau**

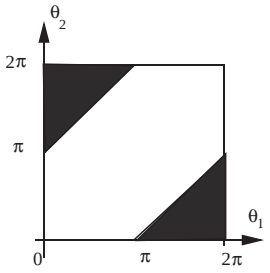
On note Θ_1 et Θ_2 les angles formés par les deux rayons et le rayon qui passe par la cerise. La longueur angulaire de la part contenant la cerise est donc de $2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2|$. D'après l'énoncé, les variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes et équidistribuées selon une loi de probabilité uniforme sur $[0, 2\pi]$.



1.1] La probabilité que la part contenant la cerise soit plus petite que la part ne contenant pas la cerise est donnée par

$$\begin{aligned} P(2\pi - |\Theta_1 - \Theta_2| < |\Theta_1 - \Theta_2|) &= P(|\Theta_1 - \Theta_2| > \pi) \\ &= \int\int_{\Delta} f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\Delta} d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{Aire(\Delta)}{(2\pi)^2} = \frac{\pi^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(\theta_1,\theta_2), |\theta_1 - \theta_2| > \pi)\}$.



1.2] D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(|\Theta_1 - \Theta_2|) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta_1 - \theta_2| f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\theta_1}(\theta_1 - \theta_2)d\theta_2\right)d\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

puisque les variables aléatoires Θ_1 et Θ_2 sont indépendantes $f_{\Theta_1,\Theta_2}(\theta_1,\theta_2) = f_{\Theta_1}(\theta_1)f_{\Theta_1}(\theta_2)$ et puisque $f_{\Theta}(\theta_2) = f_{\Theta}(\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{]0,2\pi[}$ car Θ_1 et Θ_2 sont choisies au hasard dans $[0, 2\pi]$.

Par suite la longueur moyenne de la part contenant la cerise est de

$$2\pi - \mathrm{E}(|\Theta_1 - \Theta_2|) = \frac{4\pi}{3} > \pi.$$

La part contenant la cerise est plus grande que la part ne la contenant pas en moyenne et elle est également plus grande dans 75% des cas. Pour voir que ce résultat ne contredit pas l'intuition, il faut inverser les opérations. On découpe d'abord au hasard deux rayons dans le gâteau puis on jette au hasard la cerise sur le bord. Celle-ci a bien intuitivement plus de chance de tomber sur la part la plus grosse.

2] **File d'attente**

2.1] D'après les hypothèses de l'énoncé :

$$Y_C = \inf(X_A, X_B) \qquad \text{et} \qquad Z_C = Y_C + X_C = \inf(X_A, X_B) + X_C.$$

2.2]

$$\begin{aligned} F_{Y_C}(y) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y_C < y) = P(\inf(X_A, X_B) < y) = P[(X_A < y) \cup (X_B < y)] \\ &= P(X_A < y) + P(X_B < y) - P[(X_A < y) \cap (X_B < y)] \\ &= P(X_A < y) + P(X_B < y) - P(X_A < y)P(X_B < y) = F_{X_A}(y) + F_{X_B}(y) - F_{X_A}(y)F_{X_B}(y) \end{aligned}$$

car X_A et X_B sont des variables aléatoires indépendantes. Or pour une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ, sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{array} \right. = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Par suite

$$F_{Y_C}(y) = (1 - e^{-2\lambda y})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \text{ et } f_{Y_C}(y) = 2\lambda e^{-2\lambda y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

Soit une loi exponentielle de paramètre 2λ.

2.3] Puisque X_A, X_B et X_C sont indépendantes, Y_C et X_C sont aussi indépendantes. Alors

$$\begin{aligned} f_{Z_C}(z) &= f_{Y_C}(z) * f_{X_C}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_C}(u) f_{X_C}(z-u)du \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & z < 0 \\ \int_0^z f_{Y_C}(u) f_{X_C}(z-u)du & z \geq 0 \end{array} \right. \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & z < 0 \\ 2\lambda e^{-\lambda z}\left[\int_0^z \lambda e^{-\lambda u}du\right] & z \geq 0 \end{array} \right. = 2\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z). \end{aligned}$$

3] **Loi de probabilité exponentielle**

3.1] Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$.
Alors avec $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1 < ax_2\}$:

$$\begin{aligned} P(X_1 < aX_2) &= \int\int_{\Delta} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int\int_{\Delta} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{ax_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)dx_1\right]dx_2 = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2}\left[1 - e^{-\lambda a z_2}\right]dx_2 \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2}dx_2 - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda(1+a)x_2}dx_2 = 1 - \frac{1}{1+a} = \frac{a}{1+a}. \end{aligned}$$

Expression qui est une fonction croissante de a, tendant vers 1 pour a tendant vers $+\infty$ et vers 0 pour a tendant vers 0, avec $P(X_1 < X_2) = \frac{1}{2}$, ce qui est intuitif puisque X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi de probabilité.

3.2] Par suite :

$$P(X_1 < X_2 / X_1 < 2X_2) = \frac{P[(X_1 < X_2) \cap (X_1 < 2X_2)]}{P(X_1 < 2X_2)} = \frac{P(X_1 < X_2)}{P(X_1 < 2X_2)} = \frac{1}{2}\frac{1+2}{2} = \frac{3}{4}.$$